MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

ESPACIOS DE BESOV ASOCIADOS A LA TRANSFORMACIÓN DE HANKEL

JORGE J. BETANCOR, JOSÉ MANUEL MÉNDEZ Y LOURDES RODRÍGUEZ-MESA

A la memoria de Chicho, por su amistad y generosidad

Abstract. Different characterizations of the Besov spaces, previously considered in [5] and associated with the Hankel transformation, are given. Moreover, it is established that the Hankel transform maps the Besov spaces into a class of Herz spaces.

1. Introducción

Una de las formas que toma la transformación de Hankel en la literatura es la siguiente ([14]):

$$h_\mu(\phi)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) f(y) y^{2\mu+1}\, dy, \qquad x \in (0,\infty),$$

donde J_μ representa la función de Bessel de primera especie y de orden μ. A lo largo de este trabajo consideraremos $\mu > -1/2$.

Si denotamos por $L_{p,\mu}$, para cada $1 \le p \le \infty$, el p-espacio de Lebesgue asociado a la medida $x^{2\mu+1}\, dx$ y por $\|\cdot\|_{p,\mu}$ su norma usual, la transformación h_μ de Hankel define una aplicación continua de $L_{p,\mu}$ en $L_{p',\mu}$, siempre que $1 \le p \le 2$ y que p' denote el exponente conjugado de p ([14, Theorem 3]).

Haimo [13] y Hirschman [16] investigaron la operación de convolución para la transformación de Hankel sobre los espacios $L_{p,\mu}$. Si f y g están en $L_{1,\mu}$ la convolución $f \#_\mu g$ de f y g se define por

$$(f \#_\mu g)(x) = \int_0^\infty f(y) ({}_\mu\tau_x g)(y) \frac{y^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}\, dy, \qquad \text{c.t. } x \in (0,\infty),$$

donde la traslación ${}_\mu\tau_x g$ de g por $x \in (0,\infty)$ viene dada como sigue:

$$({}_\mu\tau_x g)(y) = \int_0^\infty \mathcal{D}_\mu(x,y,z) g(z) \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}\, dz, \qquad \text{c.t. } y \in (0,\infty); \qquad {}_\mu\tau_0 g = g,$$

y el núcleo de Delsarte $\mathcal{D}_\mu$ podemos representarlo de la forma

$$\mathcal{D}_\mu(x,y,z) = [2^\mu \Gamma(\mu+1)]^2 \int_0^\infty (xt)^{-\mu} J_\mu(xt)(yt)^{-\mu} J_\mu(yt)(zt)^{-\mu} J_\mu(zt) t^{2\mu+1}\, dt,$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46E30, 44A20.
Key words and phrases. Hankel transformation, Besov spaces, Herz spaces.
Partially supported by DGICYT Grant PB 97-1489 (Spain).

para cada $x, y, z \in (0, \infty)$.

La convolución $\#_\mu$ y la traslación ${}_\mu\tau_x$, $x \in (0, \infty)$, se relacionan con la transformación h_μ de Hankel como las siguientes relaciones muestran ([16]):

$$h_\mu(f \,\#_\mu\, g) = h_\mu(f)h_\mu(g), \qquad f, g \in L_{1,\mu};$$
$$h_\mu({}_\mu\tau_x f) = 2^\mu\Gamma(\mu+1)(x\cdot)^{-\mu}J_\mu(x\cdot)h_\mu(f), \qquad f \in L_{1,\mu} \text{ y } x \in [0, \infty).$$

En lo que sigue, ya que no creemos que produzca confusión, escribiremos $\#$, $\mathcal{D}$ y τ_x, $x \in (0, \infty)$, en lugar de $\#_\mu$, $\mathcal{D}_\mu$ y ${}_\mu\tau_x$, $x \in (0, \infty)$, respectivamente.

La transformación de Hankel fue definida en espacios de distribuciones de crecimiento lento por primera vez por Zemanian [25]. Los resultados de este autor fueron adaptados a la transformación h_μ por Altenburg [1]. Si denotamos por S_e el subespacio del espacio S de Schwartz constituido por las funciones pares en S, la transformación h_μ es un automorfismo sobre S_e ([1, Satz 5]). Las propiedades de la convolución $\#$ sobre el espacio S_e y su dual S_e' pueden deducirse de las establecidas en [18].

En [6] y [7], Betancor y Rodríguez-Mesa estudiaron espacios de tipo Lipschitz donde la traslación usual es reemplazada por la traslación de Hankel. Estos autores en [5] introdujeron los espacios que denominaron espacios de Besov-Hankel involucrando de nuevo al operador traslación de Hankel. Inspirados en la definición de los espacios de Besov usuales a partir de diferencias, definen, para cada $\alpha > 0$, $1 \le p, q \le \infty$, el espacio $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ como aquél formado por las funciones $f \in L_{p,\mu}$ tales que

$$A_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{\int_0^\infty \left(\frac{\|\tau_t f - f\|_{p,\mu}}{t^\alpha}\right)^q \frac{dt}{t}\right\}^{1/q} < \infty.$$

La expresión anterior debe ser entendida de la forma adecuada cuando $q = \infty$. En [5] se presentan caracterizaciones de los espacios de Besov-Hankel $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ en términos de medias de Bochner-Riesz ([5, Theorem 2.1]) y de integrales parciales de Hankel ([5, Theorem 2.2]). En [9, Theorem IV.3.1] Cruz describió $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ por medio de la convolución con una función introducida en [22] y que desempeña en el marco de la transformación de Hankel el papel del núcleo de Poisson en la teoría clásica.

En este trabajo establecemos nuevas caracterizaciones de los espacios de Besov-Hankel que pueden ser vistas como versiones, en el marco de la transformación de Hankel, de otras conocidas para los espacios de Besov clásicos ([24]). Entre otras cosas, probamos que los espacios $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ coinciden con ciertos espacios tipo Besov que habían sido introducidos por Altenburg ([2]). También es estudiado el comportamiento de la transformación de Hankel h_μ sobre los espacios $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$. Probamos que la transformación h_μ aplica continuamente cada espacio de Besov-Hankel en un espacio de Herz.

A lo largo de este trabajo por C representaremos una constante positiva que no es necesariamente la misma cada vez que aparezca.

2. Los espacios de Besov-Hankel

Presentamos en esta sección diferentes caracterizaciones para los espacios de Besov-Hankel $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$.

Introducimos a continuación las definiciones que necesitamos.

Supongamos que $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ y $f \in L_{p,\mu}$.

Si $\varphi \in L_{1,\mu}$ definimos

$$B_{p,q}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\|\varphi_t \# f\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q},$$

donde $\varphi_t(x) = t^{-2\mu-2}\varphi(x/t)$, $t, x \in (0,\infty)$.

Para cada $x \in (0,\infty)$, denotamos por $w_p^\mu(f,x)$ el módulo de continuidad (generalizado) asociado a la traslación τ, esto es,

$$w_p^\mu(f,x) = \sup_{0 \leq t \leq x} \|\tau_t f - f\|_{p,\mu}.$$

Por $S_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$ entendemos la cantidad que sigue:

$$S_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{w_p^\mu(f,x)}{x^\alpha} \right)^q \frac{dx}{x} \right\}^{1/q}.$$

Representamos por $C_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$ a

$$C_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_1^\infty (x^\alpha E_p^\mu(f,x))^q \frac{dx}{x} \right\}^{1/q},$$

donde $E_p^\mu(f,t) = \text{ínf}\{\|f-g\|_{p,\mu} : \text{sop}(h_\mu(g)) \subset [-t,t]\}$, $t > 0$.

En [2], Altenburg introdujo los espacios de Sobolev asociados a operadores de Bessel. Recientemente, estos espacios de Sobolev han sido analizados por Betancor [4] y Cruz y Rodríguez [10]. En particular, aquí consideramos el espacio $\mathfrak{D}_{p,\mu}$ constituido por aquellas funciones $f \in L_{p,\mu}$ tales que $\Delta_\mu f \in L_{p,\mu}$, donde Δ_μ denota al operador de Bessel $x^{-2\mu-1}Dx^{2\mu+1}D$ y $\Delta_\mu f$ se entiende en sentido distribucional. El espacio $\mathfrak{D}_{p,\mu}$ es dotado de la norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{D}_{p,\mu}}$ definida por

$$\|f\|_{\mathfrak{D}_{p,\mu}} = \|f\|_{p,\mu} + \|\Delta f\|_{p,\mu}, \qquad f \in \mathfrak{D}_{p,\mu}.$$

Si K representa el K-funcional de Peetre asociado al par $(L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu})$ ([17]), definimos la cantidad $D_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$ por

$$D_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_0^\infty (x^{-\alpha/2} K(x,f,L_{p,\mu},\mathfrak{D}_{p,\mu}))^q \frac{dx}{x} \right\}^{1/q}.$$

Sea ahora $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L_{1,\mu}$. Denotamos por $E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f)$ a

$$E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f) = \left\{ \sum_{k=0}^\infty (2^{k\alpha}\|h_\mu(\psi_k) \# f\|_{p,\mu})^q \right\}^{1/q}.$$

Las expresiones anteriores adoptan la forma adecuada cuando $q = \infty$.

Establecemos ahora el resultado principal de nuestro trabajo.

Teorema 2.1. *Sean $\alpha > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$ y $f \in L_{p,\mu}$. Supongamos que $\varphi \in S_e$ es tal que $\int_0^\infty \varphi(x)x^{2\mu+1}\,dx = 0$ y $\int_0^\infty [h_\mu(\varphi)(t)]^2 \frac{dt}{t} = 1$, y que $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas y pares en $\mathbb{R}$ verificando las propiedades que siguen:*

(*a*) *$\psi_0(x) = 0$, $|x| \geq 2$, y $\psi_k(x) = 0$, $|x| \leq 2^{k-1}$ ó $|x| \geq 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots,$*

(*b*) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|h_\mu(\psi_k)\|_{1,\mu} < \infty$,

(*c*) $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k = 1$, *en* $\mathbb{R}$.

Consideramos las siguientes propiedades:

(*i*) $f \in \mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$, *esto es,* $A^{\alpha,\mu}_{p,q}(f) < \infty$,

(*ii*) $B^{\alpha,\mu,\varphi}_{p,q}(f) < \infty$,

(*iii*) $S^{\alpha,\mu}_{p,q}(f) < \infty$,

(*iv*) $D^{\alpha,\mu}_{p,q}(f) < \infty$,

(*v*) $C^{\alpha,\mu}_{p,q}(f) < \infty$,

(*vi*) $E^{\alpha,\mu,\psi}_{p,q}(f) < \infty$.

Entonces, las propiedades (*i*), (*ii*), (*iii*) *y* (*iv*) *son equivalentes si* $1 \le p \le \infty$ *y* $1 < q < \infty$. *Cuando* $1 \le p \le \infty$ *y* $q = 1$ *ó* $q = \infty$ (*i*), (*ii*), (*iii*) *y* (*iv*) *son equivalentes si* $0 < \alpha < 2$.

Por otra parte, si $1 \le p \le \infty$ *y* $1 \le q < \infty$, *se tiene la equivalencia de* (*v*) *y* (*vi*).

Además, en el caso de que $0 < \alpha < 1$, $1 \le p < \infty$ *y* $1 \le q < \infty$, *las propiedades* (*iii*) *y* (*v*) *son equivalentes.*

Demostración.
(*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*). El procedimiento seguido en la demostración de esta propiedad está inspirado en las ideas recogidas en [3, Section 2] y [11].

Probaremos primero que, para cada $r > 0$,

$$(1) \qquad \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \le C \int_0^\infty \text{mín}\Big\{\Big(\frac{x}{t}\Big)^{2\mu+2}, \Big(\frac{t}{x}\Big)^r\Big\} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x}, \quad t \in (0,\infty).$$

Sea $t > 0$. Ya que $\int_0^\infty \varphi_t(x) x^{2\mu+1}\,dx = \int_0^\infty \varphi(x) x^{2\mu+1}\,dx = 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}(\varphi_t \# f)(y) &= \int_0^\infty \varphi_t(x)(\tau_y f)(x) \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}\,dx \\ &= \int_0^\infty \varphi_t(x)\Big[(\tau_y f)(x) - f(y)\Big] \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dx, \qquad y \in (0,\infty).\end{aligned}$$

Aplicando ahora la desigualdad integral de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned}\|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} &\le \int_0^\infty |\varphi_t(x)|\, \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dx \\ &= t^{-2\mu-2} \int_0^\infty \Big|\varphi\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big|\, \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dx \\ &= \frac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty \Big(\frac{x}{t}\Big)^{2\mu+2} \Big|\varphi\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big|\, \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Además, ya que $\varphi \in S_e$, para cada $r > 0$ existe $C > 0$ de manera que

$$(3) \qquad \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \le C \int_0^\infty \Big(\frac{t}{x}\Big)^r \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x}.$$

De (2) y (3) se deduce ya (1).

Para probar que $B_{p,q}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) \leq C A_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$, cuando $1 < q < \infty$, podemos recurrir al lema de Schur ([3, Lemma B]) y proceder como en [3].

Probamos ahora que $B_{p,1}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) \leq C A_{p,1}^{\alpha,\mu}(f)$.

Tomamos $r > \alpha$. De (1) se sigue que

$$\begin{aligned}
B_{p,1}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) &= \int_0^\infty \frac{\|\varphi_t \# f\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \frac{dt}{t} \\
&\leq C \int_0^\infty \int_0^\infty \text{mín}\left\{ \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2}, \left(\frac{t}{x}\right)^r \right\} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x} t^{-1-\alpha}\, dt \\
&= C \int_0^\infty \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \int_0^\infty \text{mín}\left\{ \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2}, \left(\frac{t}{x}\right)^r \right\} t^{-1-\alpha}\, dt \frac{dx}{x} \\
&\leq C \int_0^\infty \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \left\{ \frac{1}{x^r} \int_0^x t^{r-\alpha-1}\, dt + x^{2\mu+2} \int_x^\infty t^{-\alpha-2\mu-3}\, dt \right\} \frac{dx}{x} \\
&\leq C \int_0^\infty \frac{\|\tau_x f - f\|_{p,\mu}}{x^\alpha} \frac{dx}{x} = C A_{p,1}^{\alpha,\mu}(f).
\end{aligned}$$

Por otra parte, teniendo de nuevo en cuenta (1) podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} &\leq C \int_0^\infty \text{mín}\left\{ \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2}, \left(\frac{t}{x}\right)^r \right\} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x} \\
&\leq C \left\{ \int_0^t \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x} + \int_t^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^r \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x} \right\} \\
&\leq C A_{p,\infty}^{\alpha,\mu}(f) \left\{ t^{-2\mu-2} \int_0^t x^{2\mu+1+\alpha}\, dx + t^r \int_t^\infty x^{\alpha-r-1}\, dx \right\} \\
&\leq C t^\alpha A_{p,\infty}^{\alpha,\mu}(f), \qquad t \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que

$$B_{p,\infty}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) \leq C A_{p,\infty}^{\alpha,\mu}(f).$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Sean $0 < \varepsilon < \delta < \infty$. Definimos $f_{\varepsilon,\delta}$ por

$$f_{\varepsilon,\delta}(y) = \int_\varepsilon^\delta (\varphi_t \# \varphi_t \# f)(y) \frac{dt}{t}, \qquad y \in (0,\infty).$$

Intercambiando el orden de integración obtenemos

$$(\tau_x f_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta})(y) = \int_\varepsilon^\delta ((\tau_x \varphi_t - \varphi_t) \# \varphi_t \# f)(y) \frac{dt}{t}, \qquad x, y \in (0,\infty).$$

Por tanto, de la desigualdad de Minkowski y [16, Theorem 2.b], se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\tau_x f_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta}\|_{p,\mu} &\leq \int_\varepsilon^\delta \|(\tau_x \varphi_t - \varphi_t) \# \varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_\varepsilon^\delta \|\tau_x \varphi_t - \varphi_t\|_{1,\mu} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t}, \qquad x \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Además, [17, (2.9)] implica que, representando por Δ_μ al operador de Bessel $x^{-2\mu-1}Dx^{2\mu+1}D$,

$$\|\tau_x\varphi - \varphi\|_{1,\mu} \leq Cx^2\|\Delta_\mu\varphi\|_{1,\mu}, \qquad x \in (0,\infty),$$

y la contractividad del operador de traslación de Hankel τ_x, $x \in (0,\infty)$, en $L_{1,\mu}$ ([23, p. 16]) permite escribir

$$\|\tau_x\varphi - \varphi\|_{1,\mu} \leq 2\|\varphi\|_{1,\mu}, \qquad x \in (0,\infty).$$

De las estimaciones anteriores se infiere

$$\begin{aligned}
&\|\tau_x\varphi_t - \varphi_t\|_{1,\mu} \\
&= \int_0^\infty \left|\int_0^\infty \mathcal{D}(x,y,z)\varphi\Big(\frac{z}{t}\Big)t^{-2\mu-2}\frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dz - t^{-2\mu-2}\varphi\Big(\frac{y}{t}\Big)\right| y^{2\mu+1}\,dy \\
&= \int_0^\infty \left|\int_0^\infty \mathcal{D}\Big(\frac{x}{t},\frac{y}{t},z\Big)\varphi(z)\frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dz - \varphi\Big(\frac{y}{t}\Big)\right| t^{-2\mu-2}y^{2\mu+1}\,dy \\
&= \int_0^\infty |(\tau_{x/t}\varphi)_t(y) - \varphi_t(y)|y^{2\mu+1}\,dy \\
&= \|\tau_{x/t}\varphi - \varphi\|_{1,\mu} \leq C\,\text{mín}\Big\{1,\frac{x^2}{t^2}\Big\}, \qquad x,t \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\|\tau_x f_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta}\|_{p,\mu} \leq C\int_\varepsilon^\delta \text{mín}\Big\{1,\frac{x^2}{t^2}\Big\}\|\varphi_t \# f\|_{p,\mu}\,\frac{dt}{t}, \qquad x \in (0,\infty). \tag{4}$$

Por otra parte, en virtud de las condiciones impuestas a la función φ, se tiene

$$\int_0^\infty \left|\int_0^y (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1}\,dt\right| \frac{dy}{y} < \infty. \tag{5}$$

En efecto, observamos inicialmente que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty}\int_0^y (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1}\,dt &= \int_0^\infty (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1}\,dt \\
&= 2^\mu\Gamma(\mu+1)h_\mu(\varphi \# \varphi)(0) \\
&= 2^\mu\Gamma(\mu+1)[h_\mu(\varphi)(0)]^2 = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, ya que $\varphi \# \varphi \in S_e$ ([18, Proposition 2.2 (i)], para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{y\to\infty} y^m\int_0^y (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1}\,dt = \lim_{y\to\infty} -\frac{1}{m}y^{m+2\mu+2}(\varphi \# \varphi)(y) = 0.$$

Además,

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\int_0^y (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1}\,dt = \lim_{y\to 0^+}(\varphi \# \varphi)(y)y^{2\mu+1} = 0.$$

Se deduce ya que (5) se verifica.

Teniendo en cuenta ahora [19, Theorem 2.2], de (5) se sigue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \delta\to\infty} f_{\varepsilon,\delta} = f,$$

en el sentido de la convergencia en $L_{p,\mu}$.

De (4) se sigue entonces, ya que el operador de traslación de Hankel τ_x, $x \in (0,\infty)$, aplica continuamente $L_{p,\mu}$ en sí mismo,

$$\|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \leq C \int_0^\infty \text{mín}\Big\{1, \frac{x^2}{t^2}\Big\} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t}, \qquad x \in (0,\infty). \tag{6}$$

Recurriendo al lema de Schur ([3, Lemma B]), deducimos de (6) que

$$A^{\alpha,\mu}_{p,q}(f) \leq C B^{\alpha,\mu,\varphi}_{p,q}(f),$$

siempre que $1 < q < \infty$.

Suponemos ahora que $0 < \alpha < 2$ y tratamos los casos $q = 1$ y $q = \infty$. Se infiere de (6) que

$$\begin{aligned} A^{\alpha,\mu}_{p,1}(f) &= \int_0^\infty \frac{\|\tau_x f - f\|_{p,\mu}}{x^\alpha} \frac{dx}{x} \\ &\leq C \int_0^\infty \int_0^\infty \text{mín}\Big\{1, \frac{x^2}{t^2}\Big\} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t} x^{-1-\alpha}\, dx \\ &\leq C \int_0^\infty \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \Big(\frac{1}{t^2} \int_0^t x^{1-\alpha}\, dx + \int_t^\infty x^{-1-\alpha}\, dx\Big) \frac{dt}{t} \\ &\leq C B^{\alpha,\mu,\varphi}_{p,1}(f). \end{aligned}$$

Finalmente, de nuevo (6) conduce a

$$\begin{aligned} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} &\leq C \left(\int_0^x \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t} + \int_x^\infty \Big(\frac{x}{t}\Big)^2 \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t} \right) \\ &\leq C B^{\alpha,\mu,\varphi}_{p,\infty}(f) \left(\int_0^x t^{\alpha-1}\, dt + \int_x^\infty t^{\alpha-3}\, dt \right) \\ &\leq C x^\alpha B^{\alpha,\mu,\varphi}_{p,\infty}(f), \qquad x \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A^{\alpha,\mu}_{p,\infty}(f) \leq C B^{\alpha,\mu,\varphi}_{p,\infty}(f).$$

$(ii) \iff (iii)$. Esta equivalencia puede probarse siguiendo el procedimiento utilizado en la demostración de $(i) \iff (ii)$.

$(iii) \iff (iv)$. De [17, Theorem 3.1] se puede deducir que, para una cierta constante $C > 0$, se tiene

$$\frac{1}{C} w^\mu_p(f,x) \leq K(x^2, f, L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu}) \leq C w^\mu_p(f,x), \qquad x \in (0,\infty). \tag{7}$$

De aquí inferimos ya la equivalencia deseada.

$(iii) \Longrightarrow (v)$. Suponemos que $1 \leq p < \infty$. Cuando $p = \infty$ puede procederse de un modo similar. De la desigualdad (7) se sigue que, para cada $\lambda, x \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned} w^\mu_p(f, \lambda x) &\leq C K((\lambda x)^2, f, L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu}) \\ &= C \inf_{f = f_0 + f_1,\ f_0 \in L_{p,\mu}, f_1 \in \mathfrak{D}_{p,\mu}} (\|f_0\|_{p,\mu} + (\lambda x)^2 \|f_1\|_{\mathfrak{D}_{p,\mu}}) \\ &\leq C \,\text{máx}\{1, \lambda^2\} \inf_{f = f_0 + f_1,\ f_0 \in L_{p,\mu}, f_1 \in \mathfrak{D}_{p,\mu}} (\|f_0\|_{p,\mu} + x^2 \|f_1\|_{\mathfrak{D}_{p,\mu}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq C\,\text{máx}\{1,\lambda^2\}K(x^2,f,L_{p,\mu},\mathfrak{D}_{p,\mu})\\ &\leq C\,\text{máx}\{1,\lambda^2\}w_p^\mu(f,x),\qquad f\in L_{p,\mu}.\end{aligned}\tag{8}$$

Elegimos una función $\varphi\in S_e$ tal que $\operatorname{sop}(h_\mu(\varphi))\subset[-1,1]$ y que

$$\int_0^\infty \varphi(x)x^{2\mu+1}\,dx=2^\mu\Gamma(\mu+1).$$

De la fórmula de intercambio para la transformación de Hankel h_μ ([16, Theorem 2.d]), se infiere

$$h_\mu(f\,\#\,\varphi_{1/t})=h_\mu(f)h_\mu(\varphi_{1/t}),\qquad t\in(0,\infty).$$

Luego, $\operatorname{sop}(h_\mu(f\,\#\,\varphi_{1/t}))\subset[-t,t]$, para cada $t\in(0,\infty)$, y podemos concluir que

$$E_p^\mu(f,t)\leq\|f-\varphi_{1/t}\,\#\,f\|_{p,\mu},\qquad t\in(0,\infty).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la desigualdad de Minkowski podemos escribir

$$\begin{aligned}&\|f-\varphi_{1/t}\,\#\,f\|_{p,\mu}\\ &=\left\{\int_0^\infty\left|f(y)-\int_0^\infty\varphi_{1/t}(z)(\tau_yf)(z)\frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dz\right|^py^{2\mu+1}\,dy\right\}^{1/p}\\ &=\left\{\int_0^\infty\left|\int_0^\infty\varphi_{1/t}(z)[f(y)-(\tau_zf)(y)]\frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dz\right|^py^{2\mu+1}\,dy\right\}^{1/p}\\ &\leq\int_0^\infty|\varphi_{1/t}(z)|\,\|f-\tau_zf\|_{p,\mu}\frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dz\\ &\leq\int_0^\infty|\varphi_{1/t}(z)|w_p^\mu(f,z)\frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,dz,\qquad t\in(0,\infty).\end{aligned}$$

Además, de (8) sigue

$$\begin{aligned}\|f-\varphi_{1/t}\,\#\,f\|_{p,\mu}&\leq Cw_p^\mu\Big(f,\frac{1}{t}\Big)\int_0^\infty|\varphi_{1/t}(z)|[1+(tz)^2]z^{2\mu+1}\,dz\\ &\leq Cw_p^\mu\Big(f,\frac{1}{t}\Big)\int_0^\infty|\varphi(z)|(1+z^2)z^{2\mu+1}\,dz,\qquad t\in(0,\infty).\end{aligned}$$

Combinando las estimaciones anteriores conseguimos

$$\begin{aligned}C_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)&\leq C\left\{\int_1^\infty\Big[t^\alpha w_p^\mu\Big(f,\frac{1}{t}\Big)\Big]^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}\\ &\leq C\left\{\int_0^\infty\Big[\frac{w_p^\mu(f,t)}{t^\alpha}\Big]^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}=CS_{p,q}^{\alpha,\mu}(f).\end{aligned}$$

$(v)\Longrightarrow(iii)$. Asumimos que $1\leq p<\infty$. Procediendo como en la demostración de [12, Theorem 2.1] podemos establecer, recurriendo a la desigualdad de Jensen, que si $h\in L_{p,\mu}$ y $h'\in L_{p,\mu}$,

$$\begin{aligned}&\|\tau_{y_1}h-\tau_{h_2}h\|_{p,\mu}^p\\ &=\int_0^\infty\left|\int_0^\pi[h((x,y_1)_\theta)-h((x,y_2)_\theta)]\,d\nu(\theta)\right|^px^{2\mu+1}\,dx\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^\infty \int_0^\pi |h((x,y_1)_\theta) - h((x,y_2)_\theta)|^p \, d\nu(\theta) x^{2\mu+1} \, dx$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \left| \int_0^1 \frac{d}{ds}[h((x, y_2 + s(y_1 - y_2))_\theta)] \, ds \right|^p d\nu(\theta) \, x^{2\mu+1} \, dx$$
$$\leq |y_1 - y_2|^p \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\pi |h'((x, y_2 + s(y_1 - y_2))_\theta)|^p \, d\nu(\theta) \, x^{2\mu+1} \, dx \, ds$$
$$= |y_1 - y_2|^p \int_0^1 \int_0^\infty \tau_{y_2 + s(y_1 - y_2)}(|h'|^p)(x) x^{2\mu+1} \, dx \, ds$$
$$\leq C|y_1 - y_2|^p \int_0^1 \|h'\|_{p,\mu} \, ds = C|y_1 - y_2|^p \int_0^\infty |h'(x)|^p x^{2\mu+1} \, dx, \quad y_1, y_2 \geq 0.$$

Aquí, para cada $x, y \in (0,\infty)$ y $\theta \in [0,\pi]$,

$$(x,y)_\theta = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta \quad \text{y} \quad d\nu(\theta) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+1/2)}(\operatorname{sen}\theta)^{2\mu} \, d\theta.$$

Por tanto, si $h \in L_{p,\mu}$ y $h' \in L_{p,\mu}$ entonces

$$\|\tau_{y_1} h - \tau_{y_2} h\|_{p,\mu} \leq C|y_1 - y_2| \, \|h'\|_{p,\mu}.$$

El argumento desarrollado en [12, Corollary 2.2] nos permite concluir que

$$\|\tau_{y_1} g - \tau_{y_2} g\|_{r,\mu} \leq C\lambda |y_1 - y_2| \, \|g\|_{r,\mu}, \qquad \lambda, y_1, y_2 \in (0,\infty), \tag{9}$$

cuando $g \in L_{r,\mu}$, $1 \leq r \leq 2$ y $\operatorname{sop}(h_\mu(g)) \subset [-\lambda, \lambda]$.

La desigualdad (9), siguiendo las ideas presentadas en [21, págs. 89–91], conduce a

$$S_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) \leq C C_{p,q}^{\alpha,\mu}(f).$$

Cuando $p = \infty$ la propiedad puede probarse de un modo análogo.

$(v) \iff (iv)$. Esta equivalencia puede ser establecida de una forma similar a como se prueba la propiedad correspondiente en el caso clásico en [20, Theorem 11]. $\square$

Nota 1. Un análisis detallado de la demostración $(i) \iff (ii)$ en el Teorema 2.1 nos permite observar que para $\alpha > 0$ esta equivalencia sigue siendo cierta cuando φ es una función par en $C^2(\mathbb{R})$ que verifica las propiedades que siguen:

(*a*) $\varphi \in L_{1,\mu}$ y $\Delta_\mu \varphi \in L_{1,\mu}$,

(*b*) $x^\alpha \varphi \in L_{1,\mu}$,

(*c*) $\int_0^\infty \varphi(x) x^{2\mu+1} \, dx = 0$ y $\int_0^\infty [h_\mu(\varphi)(y)]^2 \, dy/y \neq 0$.

Además, si $0 < \alpha < 1$ la equivalencia es cierta cuando φ verifica las propiedades (*a*) y (*c*) anteriores y la siguiente:

(*b'*) Existe $C > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq C/x^2$, $x \in (0,\infty)$.

Consideramos, en particular, la función

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\Gamma(\mu+1)} (1+x^2)^{-\mu-3/2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esta función hace el papel del núcleo de Poisson en el marco de la transformación de Hankel.

Un sencillo cálculo conduce a que

$$t\,\frac{d}{dt}\psi_t(x) = -(2\mu+2)t^{-2\mu-2}\psi\Big(\frac{x}{t}\Big) - xt^{-2\mu-3}\psi'\Big(\frac{x}{t}\Big) = \varphi_t(x), \quad x\in\mathbb{R} \text{ y } t\in(0,\infty),$$

donde $\varphi(x) = -x\psi'(x) - (2\mu+2)\psi(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

No es difícil ver que φ satisface las propiedades (a) y (b') anteriores. Además, de acuerdo con [22, Lemma 2], tenemos que

$$\int_0^\infty \psi_t(x)x^{2\mu+1}\,dx = 1, \qquad t\in(0,\infty).$$

Por tanto,

$$\int_0^\infty \varphi_t(x)x^{2\mu+1}\,dx = 0, \qquad t\in(0,\infty).$$

También, de [22, Lemma 2] se sigue que

$$h_\mu(\varphi_t)(y) = t\,\frac{d}{dt}h_\mu(\psi_t)(y) = -\frac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\,tye^{-ty}, \qquad t,y\in(0,\infty).$$

Entonces

$$\int_0^\infty [h_\mu(\varphi)(y)]^2\,\frac{dy}{y} = \frac{1}{2^{\mu+2}[\Gamma(\mu+1)]^2}.$$

Obtenemos por tanto el siguiente resultado, que da una caracterización de los espacios de Besov-Hankel en términos del núcleo de Poisson diferente a la presentada por Cruz [9].

Proposición 2.1. *Sean $0<\alpha<1$, $1\le p,q\le\infty$ y $f\in L_{p,\mu}$. Entonces, $f\in\mathcal{BH}^{\alpha;\mu}_{p,q}$ si, y sólo si,*

$$P^{\alpha,\mu,\psi}_{p,q}(f) = \left\{\int_0^\infty\left(\frac{\|t\,\frac{d}{dt}(f\,\#\,\psi_t)\|_{p,\mu}}{t^\alpha}\right)^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q} < \infty,$$

donde $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\Gamma(\mu+1)}(1+x^2)^{-\mu-3/2}$, $x\in\mathbb{R}$ (con los cambios convenientes cuando $q=\infty$). Además, las cantidades $A^{\alpha,\mu}_{p,q}$ y $P^{\alpha,\mu,\psi}_{p,q}$ son equivalentes.

Nota 2. Consideramos la función $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$. Inmediatamente se ve que

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}x^{2\mu+1}\,dx = 2^\mu\Gamma(\mu+1).$$

Por tanto, poniendo como antes $\varphi = -x\psi' - (2\mu+2)\psi$, obtenemos

$$\int_0^\infty t\,\frac{d}{dt}\psi_t(x)x^{2\mu+1}\,dx = \int_0^\infty \varphi_t(x)x^{2\mu+1}dx = 0, \qquad t\in(0,\infty).$$

Además, de [22, Lemma 1] se sigue que

$$\int_0^\infty [h_\mu(\varphi)(x)]^2\,\frac{dy}{y} = \int_0^\infty e^{-y^2}y^3\,dy = \frac{1}{2}.$$

Ya que $\varphi\in S_e$, las propiedades (a) y (b) dadas en la Nota 1 se verifican.

Podemos entonces obtener la siguiente caracterización de los espacios de Besov-Hankel, que puede interpretarse como una descripción vía (Hankel)-temperaturas de dicho espacio.

Proposición 2.2. *Sean $\alpha > 0$, $1 < p, q < \infty$ y $f \in L_{p,\mu}$. Entonces, $f \in \mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ si, y sólo si,*

$$P^{\alpha,\mu,\psi}_{p,q}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\|t\, \frac{d}{dt}(f \# \psi_t)\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty,$$

donde $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$ (con los correspondientes cambios cuando $q = \infty$). Además, las cantidades $H^{\alpha,\mu,\psi}_{p,q}(f)$ y $A^{\alpha,\mu}_{p,q}(f)$ son equivalentes.

Nota 3. Se deduce inmediatamente que si $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $\varphi = (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de funciones continuas y pares en $\mathbb{R}$, verificando las propiedades (a), (b) y (c) del Teorema 2.1, entonces $E^{\alpha,\mu,\psi}_{p,q}$ y $E^{\alpha,\mu,\varphi}_{p,q}$ definen cuasinormas equivalentes en $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$, cuando $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$. Por otra parte, podemos construir una sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que cumpla las condiciones (a), (b) y (c) del Teorema 2.1, procediendo como en [20, p. 48].

Nota 4. Como fue comentado en la introducción, Altenburg [2] definió un espacio de Besov en el marco de la transformación integral de Hankel. Consideró una sucesión $\psi = (\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones pares regulares en $\mathbb{R}$ que verifican las propiedades (a) y (c) enunciadas en el Teorema 2.1. Además supone que la siguiente propiedad se satisface:

(b'') Para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} \psi_j(x) \right| \leq C_k 2^{-jk}, \qquad j \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se define para cada $j \in \mathbb{N}$ la función φ_j por

$$\varphi_j(x) = \psi_j(1 + x^2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Para cada $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\alpha > 0$, el espacio $\mathfrak{B}^\alpha_{p,q,\mu}$ ([2]) está constituido por aquellas $f \in L_{p,\mu}$ tales que $E^{\alpha,\mu,\varphi}_{p,q}(f) < \infty$, donde φ denota la sucesión $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$. El espacio $\mathfrak{B}^\alpha_{p,q,\mu}$, definido de este modo, no depende de la sucesión $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, siempre que ésta satisfaga las propiedades (a), (c) del Teorema 2.1 y (b'').

En [2, (17)] fue establecido que $\mathfrak{B}^{\alpha/2}_{p,q,\mu}$ coincide con el espacio de interpolación $(L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu})_{\alpha,q}$, para cada $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\alpha > 0$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 2.1, $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q} = \mathfrak{B}^{\alpha/2}_{p,q,\mu}$, siempre que $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$.

3. La transformación de Hankel y los espacios de Besov-Hankel

En esta sección estudiamos el comportamiento de la transformación h_μ de Hankel sobre los espacios $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ de Besov-Hankel.

Comenzamos recordando la definición de los espacios de Herz ([15]). Sean $1 \leq p, q < \infty$ y $\alpha > 0$. Tomamos $0 < \gamma < \delta < \infty$. Una función f medible Lebesgue sobre

$(0,\infty)$ está en el espacio de Herz $\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ si

$$\|f\|_{\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p,q}} = \left\{\int_0^\delta |f(x)|^p x^{2\mu+1}\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_1^\infty \left[t^{\alpha p}\int_{\gamma t}^{\delta t} |f(x)|^p x^{2\mu+1}\,dx\right]^{q/p}\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}$$

es finito.

El espacio $\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ es cuasiBanach, cuando se considera sobre él la topología asociada a la cuasinorma $\|\cdot\|_{\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p,q}}$ y no depende de la elección de γ y δ. Además, si $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos tal que $1<\rho\le\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\le\sigma<\infty$, $j\in\mathbb{N}$, para ciertos $\rho,\sigma>1$ y definimos, para cada $f\in\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p,q}$,

$$k^{\alpha,\mu}_{p,q}(f) = \left\{\int_0^{\lambda_1} |f(x)|^p x^{2\mu+1}\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\sum_{j=1}^\infty \Big[\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} (x^\alpha|f(x)|)^p x^{2\mu+1}\,dx\Big]^{q/p}\right\}^{1/q},$$

$k^{\alpha,\mu}_{p,q}$ es una cuasinorma equivalente a $\|\cdot\|_{\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p,q}}$.

Nuestro próximo resultado es una versión de [8, Theorem 1] para la transformación de Hankel.

Proposición 3.1. *Sean* $1\le p\le 2$, $1\le q<\infty$ *y* $0<\alpha<1$. *Entonces, la transformación de Hankel aplica continuamente* $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ *en* $\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p',q}$ *y* $\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ *en* $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p',q}$.

Demostración. Elegimos una sucesión $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones verificando las propiedades (a), (b) y (c) especificadas en el Teorema 2.1. Sea $f\in\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$. Podemos escribir

$$f=\sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j)\,\#\,f, \tag{10}$$

donde la convergencia de la serie es entendida en $L_{p,\mu}$. En efecto, para cada $n,m\in\mathbb{N}$, siendo $n<m$, se tiene que

$$\Big\|\sum_{j=n}^m h_\mu(\psi_j)\,\#\,f\Big\|_{p,\mu} \le \Big\{\sum_{j=n}^m 2^{-j\alpha q'}\Big\}^{1/q'}\Big\{\sum_{j=n}^m (2^{j\alpha}\|h_\mu(\psi_j)\,\#\,f\|_{p,\mu})^q\Big\}^{1/q}.$$

Por tanto, la serie $\sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j)\,\#\,f$ converge en $L_{p,\mu}$. Además, la aplicación

$$f\longmapsto\sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j)\,\#\,f$$

es continua de $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ en $L_{p,\mu}$.

Sea ahora $g\in S_e$. La serie $\sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j)\,\#\,g$ converge, en particular, en $L_{2,\mu}$. Ya que h_μ es una isometría en $L_{2,\mu}$ ([14, Theorem 3]), de la fórmula de intercambio para la transformación de Hankel ([16, Theorem 2.d]), se sigue que la serie $\sum_{j=0}^\infty \psi_j h_\mu(g)$ converge en $L_{2,\mu}$. Teniendo en cuenta que $\sum_{j=0}^\infty \psi_j(x)=1$, $x\in(0,\infty)$, concluimos ya que $\sum_{j=0}^\infty \psi_j h_\mu(g)=h_\mu(g)$, y, por tanto, que $g=\sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j)\,\#\,g$.

De acuerdo con [2, Satz 1, §2.1], S_e es un subespacio denso de $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ y $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ está continuamente contenido en $L_{p,\mu}$, y la validez de (10) queda establecida.

La transformación h_μ de Hankel es continua de $L_{p,\mu}$ en $L_{p',\mu}$ ([14, Theorem 3]). Luego, de (10) sigue

$$h_\mu(f) = \sum_{j=k-1}^{k+1} \psi_j h_\mu(f), \qquad \text{c.t. } (2^{k-1}, 2^{k+1}) \quad \text{y} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

y, entonces,

$$\left\{ \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} |h_\mu(f)(y)|^{p'} y^{2\mu+1}\, dy \right\}^{1/p'} \leq C \sum_{j=k-1}^{k+1} \|h_\mu(\psi_j) \# f\|_{p,\mu}, \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sumando concluimos que

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} (y^\alpha |h_\mu(f)(y)|)^{p'} y^{2\mu+1}\, dy \Big)^{q/p'} \right\}^{1/q} \\
&\leq C \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \Big(2^{\alpha j p'} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} |h_\mu(f)(y)|^{p'} y^{2\mu+1}\, dy \Big)^{q/p'} \right\}^{1/q} \\
&\leq C \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \Big(2^{\alpha j} \|h_\mu(\psi_j) \# f\|_{p,\mu} \Big)^{q} \right\}^{1/q} \\
&\leq C E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f).
\end{aligned}$$

Aquí, cuando $p = 1$ las expresiones son entendidas en la forma adecuada.

Análogamente podemos probar que

$$\left\{ \int_0^1 |h_\mu(f)(y)|^{p'} y^{2\mu+1}\, dy \right\}^{1/p'} \leq C E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f).$$

De este modo hemos mostrado que h_μ aplica continuamente $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ en $\mathfrak{K}_{p',q}^{\alpha,\mu}$.

Sea ahora $f \in \mathfrak{K}_{p,q}^{\alpha,\mu}$. Observamos que $f \in L_{p,\mu}$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\Big\{ \int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\mu+1}\, dx \Big\}^{1/p} \\
&\leq \Big\{ \int_0^2 |f(x)|^p x^{2\mu+1}\, dx \Big\}^{1/p} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{ \int_{2^j}^{2^{j+1}} (x^\alpha |f(x)|)^p x^{2\mu+1}\, dx \Big\}^{1/p} \frac{1}{2^{\alpha j}} \\
&\leq \Big\{ \int_0^2 |f(x)|^p x^{2\mu+1}\, dx \Big\}^{1/p} \\
&\qquad + \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha j q'}} \Big\}^{1/q'} \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \Big[\int_{2^j}^{2^{j+1}} (x^\alpha |f(x)|)^p x^{2\mu+1}\, dx \Big]^{q/p} \Big\}^{1/q}.
\end{aligned}$$

Cuando $q = 1$ las expresiones en la última línea son entendidas de la forma adecuada.

Por tanto, $h_\mu(f) \in L_{p',\mu}$ ([14, Theorem 3]).

Tomamos una sucesión $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones que satisfaga las propiedades (a), (b) y (c) del Teorema 2.1. En virtud de [14, Theorem 3] y ya que $L_{r,\mu} \subset S'_e$, para cada $1 \leq r \leq \infty$, podemos escribir que

$$\begin{aligned}\|h_\mu(\psi_j) \,\#\, h_\mu(f)\|_{p',\mu} &= \|h_\mu(\psi_j f)\|_{p',\mu} \leq \|\psi_j f\|_{p,\mu}\\ &\leq C\Big\{\int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} |f(x)|^p x^{2\mu+1}\,dx\Big\}^{1/p}, \qquad j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos

$$\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(2^{\alpha j}\|h_\mu(\psi_j)\#h_\mu(f)\|_{p',\mu})^q\Big\}^{1/q} \leq C\Big\{\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\int_{2^j}^{2^{j+1}}(x^\alpha|f(x)|)^p x^{2\mu+1}\,dx\Big)^{q/p}\Big\}^{1/q}.$$

Un argumento similar nos permite probar que

$$\begin{aligned}\|h_\mu(\psi_0) \,\#\, h_\mu(f)\|_{p',\mu} \leq C\Big(&\Big\{\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\int_{2^j}^{2^{j+1}}(x^\alpha|f(x)|)^p x^{2\mu+1}\,dx\Big)^{q/p}\Big\}^{1/q}\\ &+\Big\{\int_0^1 |f(x)|^p x^{2\mu+1}\,dx\Big\}^{1/p}\Big).\end{aligned}$$

Concluimos que h_μ aplica continuamente $\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{p,q}$ en $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{p',q}$. □

Ya que h_μ es una isometría sobre $L_{2,\mu}$ ([14, Theorem 3]) de la proposición anterior se deduce inmediatamente la propiedad que sigue.

Corolario 3.1. *Sean $1 \leq q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$. La transformación h_μ de Hankel es un isomorfismo de $\mathcal{BH}^{\alpha,\mu}_{2,q}$ en $\mathfrak{K}^{\alpha,\mu}_{2,q}$.*

Referencias

[1] G. Altenburg, Bessel-Transformationen in Räumen von Grundfunktionen über dem Intervall $\Omega = (0,\infty)$ und deren Dualräumen, *Math. Nachr.* **108** (1982), 197–218.

[2] G. Altenburg, Eine Realisierung der Theorie der abstrakten Besov-Räume $B^s_q(A)$ $(s > 0, 1 \leq q \leq \infty)$ und der Lebesgue-Räume $H^s_{p,\mu}$ auf der Grundlage Besselscher Differentialoperatoren, *Z. Anal. Anwendungen* **3** (1984), 43–63.

[3] J. L. Ansorena y O. Blasco, Characterization of weighted Besov spaces, *Math. Nachr.* **171** (1995), 5–17.

[4] J. J. Betancor, Sobolev spaces associated to Bessel operators and Hankel translations commuting operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **66** (2000), 227–243.

[5] J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa, On the Besov-Hankel spaces, *J. Math. Soc. Japan* **50** (1998), 781–788.

[6] J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa, Lipschitz-Hankel spaces and partial Hankel integrals, *Int. Transf. Spec. Funct.* **7** (1998), 1–12.

[7] J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa, Lipschitz-Hankel spaces, partial Hankel integrals and Bochner-Riesz means, *Arch. Math. (Basel)* **71** (1998), 115–122.

[8] H.-Q. Bui, Bernstein's theorem and translation invariant operators, *Hiroshima Math. J.* **11** (1981), 81–96.

[9] I. Cruz, *Transformaciones integrales de tipo Laplace y Hankel*, Tesis Doctoral, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 2000.

[10] I. Cruz y J. Rodríguez, On new characterizations of Lipschitz and Besov type spaces, aparecerá en *Archiv. Math. (Basel)*.

[11] M. Frazier y B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **34** (1985), 777–799.

[12] J. Gosselin y K. Stempak, A weak type estimate for Fourier-Bessel multipliers, *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** (1989), 655–662.

[13] D. T. Haimo, Integral equations associated with Hankel convolutions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **116** (1965), 330–375.

[14] C. S. Herz, On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **40** (1954), 996–999.

[15] C. S. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transform, *J. Math. Mech.* **18** (1968/69), 283–323.

[16] I. I. Hirschman, Jr., Variation diminishing Hankel transforms, *J. Analyse Math.* **8** (1960/61), 307–336.

[17] J. Löfström y J. Peetre, Approximation theorems connected with generalized translations, *Math. Ann.* **181** (1969), 255–268.

[18] I. Marrero y J. J. Betancor, Hankel convolution of generalized functions, *Rend. Mat. Appl. (7)* **15** (1995), 351–380.

[19] M. A. Mourou y K. Trimèche, Calderón's reproducing formula associated with the Bessel operator, *J. Math. Anal. Appl.* **219** (1998), 97–109.

[20] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Duke Univ. Math. Ser. n.º 1, Duke University, Durham, N.C., 1976.

[21] A. Pelczyński y M. Wojciechowski, Molecular decompositions and embedding theorems for vector-valued Sobolev spaces with gradient norm, *Studia Math.* **107** (1993), 61–100.

[22] K. Stempak, *The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform*, Preprint n.º 45, Math. Inst., Univ. Wroclaw, Polonia, 1985.

[23] K. Stempak, La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986), 15–18.

[24] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.

[25] A. H. Zemanian, *Generalized integral transformations*, Interscience Publishers, Nueva York, 1968.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna (Tenerife), Islas Canarias, Spain

Correo electrónico: `jbetanco@ull.es`, `jmendez@ull.es`, `lrguez@ull.es`