Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СПАЙНЫ, СОДЕРЖАЩИЕ F-ПОЛИЭДРЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮТ ГИПОТЕЗЕ О ДИСКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

А. Ю. Маковецкий [1]

1 Введение

В работе [1] сформулирована гипотеза о дисковых преобразованиях. Для формулировки этой гипотезы потребуются несколько определений.

Определение 1. *Компактный 2–полиэдр P называется специальным полиэдром, если выполняются следующие условия:*

1) линк каждой его точки гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров: a) окружности; b) окружности с диаметром; c) окружности с тремя радиусами;

2) в P есть хотя бы одна точка с линком типа c);

3) любая 2-компонента (т.е. компонента связности точек полиэдра с линком типа a)) полиэдра P гомеоморфна открытой двумерной клетке.

Типичные окрестности точек специального полиэдра изображены на рис. 1.

Определение 2. *Объединение точек типов с линком b) и c) специального полиэдра P называется его особым графом и обозначается через SP.*

Особый граф специального полиэдра содержит конечное число точек типа c), называемых его *вершинами.* Его оставшаяся часть распадается в объединение тройных линий, т.е. связных компонент множества точек второго типа. Тройные линии будем называть *ребрами* особого графа.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — компактное трехмерное многообразие с краем. Специальный полиэдр $P \subset \mathfrak{M}$ называется специальным спайном многообразия $\mathfrak{M}$, если разность $\mathfrak{M} \setminus P$ гомеоморфна $\partial\mathfrak{M} \times (0,1]$.*

Определение 4. *Специальным спайном замкнутого многообразия $\mathfrak{M}$ является спайн многообразия $\mathfrak{M} \setminus D^3$, где D^3-открытый шар в $\mathfrak{M}$.*

Исключив из определения 1 условие 3), получим определение *простого полиэдра.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00813), Университеты России (992742) и INTAS (97-808)

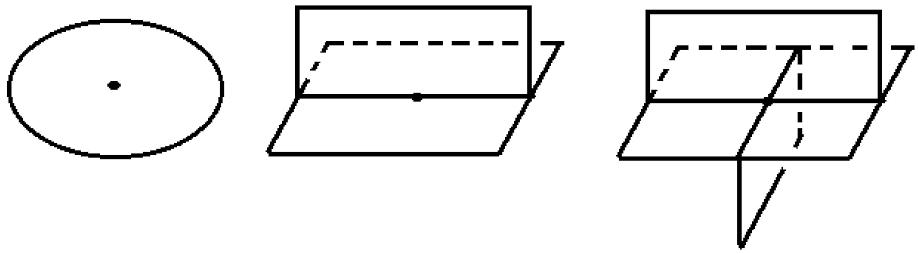

Рис. 1: Окрестности точек специального спайна

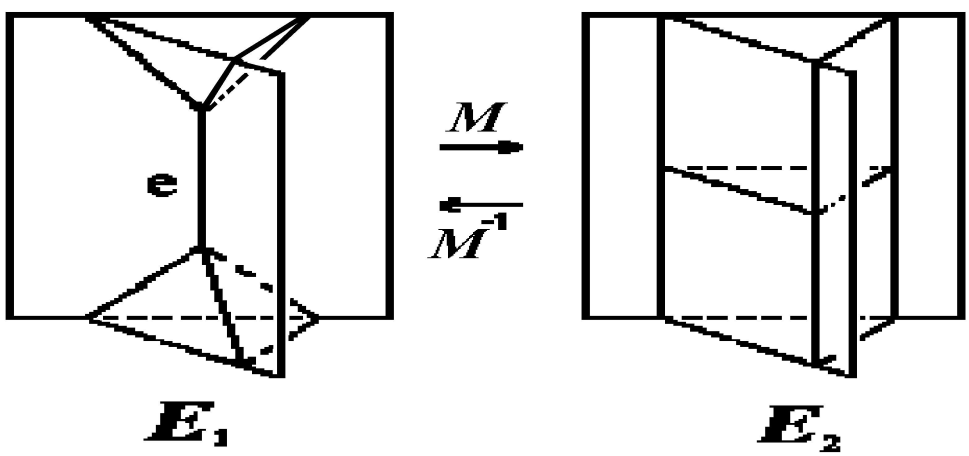

Рис. 2: Преобразование M

Определение 5. *Компактный 2-полиэдр P называется почти специальным, если он вкладывается в простой полиэдр.*

Определение *почти специального спайна* аналогично определению специального.

Опишем преобразования специальных спайнов, введенные С.В. Матвеевым, см. [2]. Выберем в специальном спайне P ребро e, инцидентное ровно двум вершинам спайна. Рассмотрим регулярную окрестность E_1 ребра e в спайне P. Пересечение окрестности E_1 с остальной частью специального спайна P гомеоморфно объединению двух окружностей, соединенных тремя дугами. Подполиэдр E_1 изображен на рис. 2.

Рассмотрим подполиэдр E_2, который представляет собой поверхность треугольной призмы вместе со средним треугольником и тремя прямоугольниками, которые присоединены к поверхности призмы вдоль трех ее ребер.

Естественная граница подполиэдра E_2 гомеоморфна естественной гра-

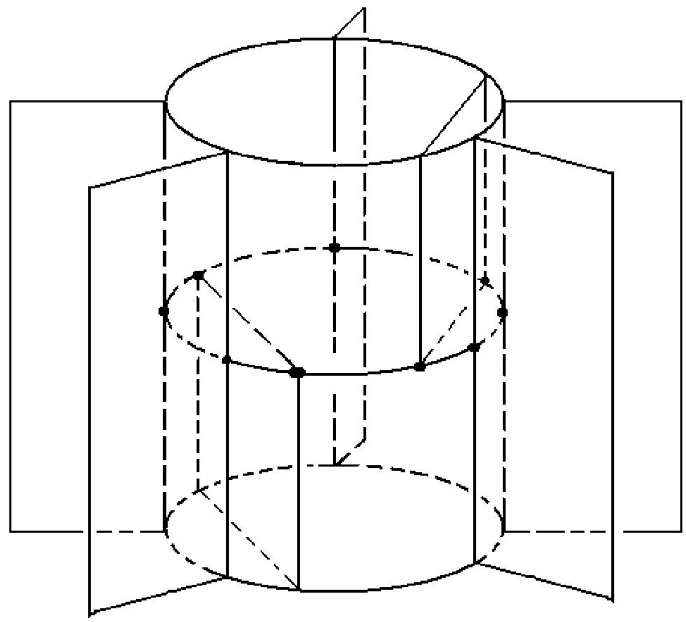

Рис. 3: Пример F-полиэдра

нице подполиэдра E_1. Если заменить подполиэдр E_1 на подполиэдр E_2, то получим новый специальный полиэдр Q.

Преобразование, состоящее в переходе от специального спайна P к специальному спайну Q, обозначается через M. Преобразование, состоящее в переходе от специального спайна Q к специальному спайну P, обозначается через M^{-1}.

Преобразования M и M^{-1} изображены на рис. 2.

Рассмотрим специальный спайн замкнутого 3-многообразия $\mathfrak{M}$. Опишем *допустимые дисковые преобразования*. Обозначим через D^2 такой диск в $\mathfrak{M}$, что $D^2 \cap P = \partial D^2$ и что кривая D^2 находится в общем положении в P. Тогда D^2 ограничивает в $\mathfrak{M} \setminus P$ шар B^3. Обозначим через $\alpha \neq D^2$ 2-компоненту полиэдра $P \cup D^2$, которая разделяет B^3 и $\mathfrak{M} \setminus B^3$. Проколов 2-компоненту α и сколлапсировав получившийся полиэдр насколько возможно получим почти специальный спайн P_1 3-многоообразия $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что P_1 получен из P *дисковым преобразованием*.

Дисковое преобразование называется *допустимым*, если выполняются следующие условия:

1) Преобразование не увеличивает число $v(P_1)$ вершин спайна P.

2) $v(P \cup D^2) - v(P) \leq 4$. Разность $v(P \cup D^2) - v(P)$ будем называть *длиной* дискового преобразования.

Отметим, что преобразование M является дисковым преобразованием, а преобразование M^{-1} – допустимым дисковым преобразованием.

Гипотеза 1. *Если специальный спайн компактного 3-многообразия не минимален, тогда число его вершин уменьшить с помощью последовательности допустимых дисковых преобразований.*

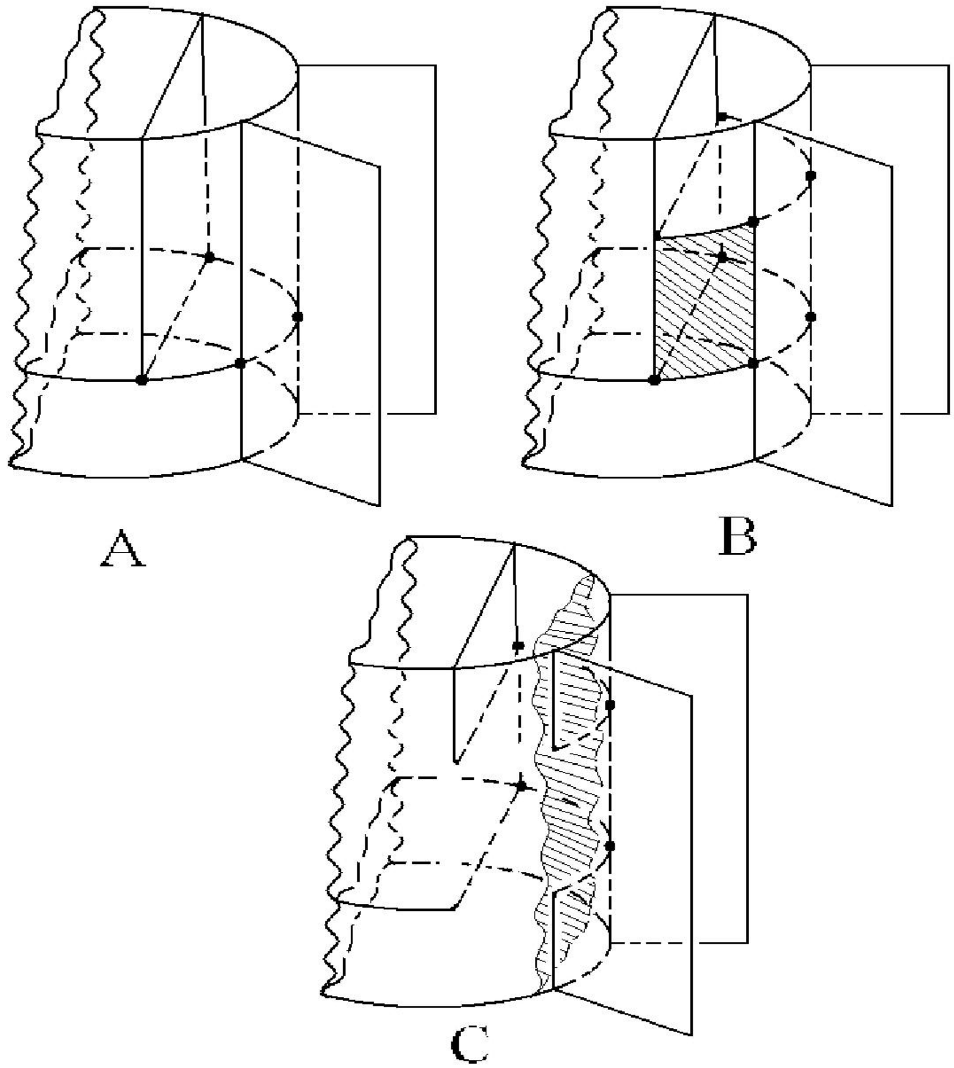

Рис. 4: Случай $cr_\alpha = 2$

В статье [1] также отмечено, что если гипотеза 1 верна, то существует простой алгоритм распознавания тривиального узла.

Гипотеза 2 сформулирована в работе [3], см. раздел 3.

В данной работе описывается бесконечная серия спайнов, удовлетворяющих гипотезе 1 и формулируется гипотеза 3, связывающая гипотезу 1 и гипотезу 2.

Автор благодарит С.В. Матвеева за постановку задачи.

2 F-полиэдры

Рассмотрим боковую поверхность цилиндра со средним диском и приклеенными к образующим цилиндра вертикальными прямоугольниками. Такие прямоугольники будем называть *внешними*. Число внешних прямоугольников обозначим через N_o. Выберем в верхней (нижней) части цилиндра две образующих и соединим их хордой среднего диска. Приклеим к образующим и хорде прямоугольник. Такие прямоугольники будем называть *внутренними*. Число внутренних прямоугольников обозначим через N_i. Хорды среднего диска между собой не пересекаются.

На рисунке 3 изображен F-полиэдр с параметрами $N_i = 2$ и $N_o = 5$.

Теорема 1. *Число вершин спайна, содержащего F-подполиэдр с параметрами N_o и N_i, удовлетворяющими условию:*
$0 \leq N_o \leq N_i + 3$, *причем* $N_o > 0$ *при* $N_i = 0$
можно уменьшить с помощью последовательности допустимых дисковых преобразований.

Доказательство. Применим индукцию по числу N_i. При $N_i = 0$ $1 \leq N_o \leq 3$. Во всех трех случаях число вершин можно уменьшить одним дисковым преобразованием длины один, два или три соответственно.

Пусть утверждение выполняется при $N_i = k$. Рассмотрим случай $N_i = k + 1$.

Назовем хорду H на среднем диске данного F-подполиэдра *внешней*, если одна из двух ограничиваемых этой хордой дуг α окружности среднего диска не пересекается с другими хордами.

Рассмотрим внешнюю дугу H и соответствующую ей дугу α. Дуга α инцидентна числу cr_α внешних прямоугольников. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $cr_\alpha = 0$. Тогда к данному F-подполиэдру можно применить дисковое преобразование длины два, в результате которого число вершин спайна уменьшится на две.

2. Пусть $cr_\alpha = 1$. Тогда к данному F-подполиэдру можно применить дисковое преобразование длины три, в результате которого число вершин спайна уменьшится на единицу. (Фактически, это преобразование M^{-1}.)

3. Пусть $cr_\alpha = 2$. Тогда к данному F-подполиэдру можно применить дисковое преобразование длины четыре, в результате которого число вершин спайна не изменится, но в получившемся спайне будет содержаться новый F-подполиэдр, в котором число N_i' внутренних прямоугольников на единицу меньше, чем в исходном F-подполиэдре и число N_o' внешних прямоугольников на единицу меньше, чем в исходном F-подполиэдре. Числа N_i' и N_o' удовлетворяют предположению индукции.

На рис. 4 A изображена часть рассматриваемого F-подполиэдра. На рис. 4 B показан приклеенный диск длины четыре, прокалываемая 2-компонента заштрихована. На рис. 4 C показан полиэдр, получившийся после прокалывания заштрихованной 2-компоненты и коллапсирования. Также на рис. 4 C отмечена (заштрихованная) плоскость, левее которой находится новый F-подполиэдр.

4. Пусть $cr_\alpha \geq 3$. Тогда вместо исходного F-подполиэдра можно рассмотреть новый F-подполиэдр, у которого числа $N_i' = N_i - 1$ и $N_o' \leq N_o - 1$ и удовлетворяют предположению индукции.

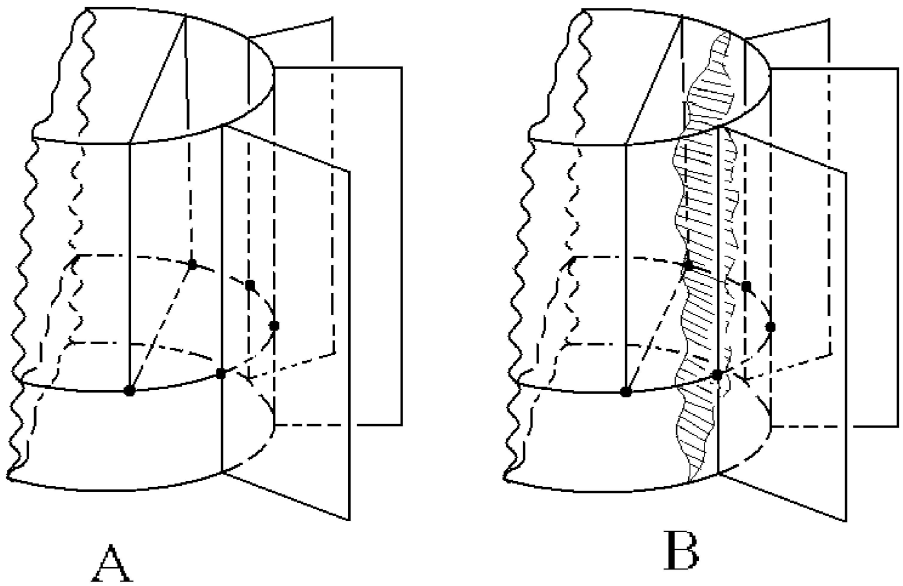

Рис. 5: Случай $cr_\alpha = 3$

На рис. 5 A изображена часть рассматриваемого F-подполиэдра. На рис. 5 B отмечена (заштрихованная) плоскость, левее которой находится новый F-подполиэдр. □

3 Дисковые преобразования спайнов.

Напомним важную в теории спайнов теорему.

Теорема 2. *(С.В. Матвеев) Специальные спайны P и Q (не менее чем с двумя вершинами) задают одно и то же 3-многообразие тогда и только тогда, когда от P к Q можно перейти с помощью последовательности преобразований M и M^{-1}.*

В [3] сформулирована следующая гипотеза, которая является усиленным вариантом теоремы 2.

Гипотеза 2. *Пусть P и Q-специальные спайны 3-многообразия $\mathfrak{M}$. Тогда существует такой специальный спайн S многообразия $\mathfrak{M}$, что от P к S и от Q к S можно перейти только с помощью последовательности преобразований M.*

Гипотеза 3. *Пусть P, S и Q такие специальные спайны 3-многообразия $\mathfrak{M}$, что они связаны последовательностью преобразований M и M^{-1} следующего вида: от P к S переход осуществляется с помощью n преобразований M, а от S к Q переход осуществляется с помощью $k \leq n-1$ преобразований M^{-1}. Тогда число вершин в спайне Q можно уменьшить с помощью последовательности допустимых дисковых преобразований.*

Прямой перебор показывает, что при $n = 2$ спайн Q всегда содержит F-подполиэдр. Из теоремы 1 отсюда следует, что при $n = 2$ гипотеза 3 выполняется.

Замечание. Из гипотезы 3 и гипотезы 2 следует гипотеза 1.
Доказательство. Пусть P – неминимальный специальный спайн 3-многообразия $\mathfrak{M}$. Тогда из гипотезы 2 следует, что от минимального спайна многообразия $\mathfrak{M}$ к спайну P можно перейти, применив сначала n преобразований M, потом не более чем $n-1$ преобразований M^{-1}. Из гипотезы 3 следует, что число вершин получившегося спайна можно уменьшить с помощью последовательности допустимых дисковых преобразований.□

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Matveev S. V.* Computer recognition of three-manifolds // Experimental Mathematics, vol.7 (1998), No. 2, pp. 153–161 Zbl 0916.57017

[2] *Матвеев С. В.* Универсальные деформации специальных полиэдров// Успехи мат. наук. N 3(1987), т. 42, стр. 193–194 Zbl 0645.57003

[3] *R.Benedetti, C. Petronio* Brunched standart spines of 3–manifolds.// Lecture Notes in Mathematics 1653, Springer–Verlag 1997. Zbl 0873.57002

Челябинский государственный университет
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: mac@cgu.chel.su