

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ НЕРВНУЮ АКТИВНОСТЬ

Е. П. Волокитин, С. А. Тресков ¹

Аннотация.

В явном виде получены выражения для первых трех ляпуновских величин сложного фокуса плоской автономной системы, описывающей активность нейронной сети. Анализ этих выражений позволил получить новые результаты, касающиеся числа и распределения предельных циклов в рассматриваемой модели.

Введение. В настоящей работе рассматривается математическая модель, описывающая процессы, протекающие в нейронной сети, состоящей из двух нервных клеток. Эта модель была предложена в работе [1] и представляет собой плоскую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_1 + q_{11}\varphi(u_1) - q_{12}u_2 + e_1, \\ \dot{u}_2 &= -u_2 + q_{21}\varphi(u_1) + e_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $q_{11}, q_{12}, q_{21} > 0, e_1, e_2 \in \mathbf{R}$ — параметры и

$$\varphi(u_1) = \frac{1}{1 + e^{-4u_1}}.$$

В [1] было проведено исследование модели (1) с применением теории бифуркаций и перечислены возможные способы динамического поведения моделируемой нейронной сети: с использованием аналитических и численных методов в некоторой части пространства параметров была построена бифуркационная диаграмма системы (1).

В работе [2] была доказана аналитическими методами корректность упомянутой бифуркационной диаграммы для некоторых специальных случаев.

Как показано в [2], замена переменных

$$u = u_1, v = \frac{u_2 - e_2}{q_{21}},$$

превращает систему (1) в систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u + a\varphi(u) - bv + c, \\ \dot{v} &= -v + \varphi(u), \end{aligned} \tag{2}$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 01-99-00574)

содержащую уже только три параметра

$$a = q_{11}, b = q_{12}q_{21}, c = e_1 - q_{12}e_2, a, b > 0, c \in \mathbf{R},$$

каковая система и будет объектом нашего исследования.

Используя результаты нашей работы [3], мы получили аналитические выражения для первых трех ляпуновских величин сложного фокуса некоторой вспомогательной системы, эквивалентной системе (2). Детальный анализ этих выражений позволил нам утверждать, что при некоторых значениях параметров система (2) имеет три концентрических предельных цикла вокруг единственного состояния равновесия, причем два из этих циклов устойчивы. Такой фазовый портрет отсутствует в списке возможных фазовых портретов системы (2), предъявленном в работах [1, 2], хотя, на наш взгляд, он представляет несомненный интерес с точки зрения содержательного смысла модели.

1. Отметим следующее свойство системы (2). Если $u(t), v(t)$ — решение такой системы, то пара $u_1(t) = -u(t), v_1(t) = 1 - v(t)$ будет решением системы

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -u + a\varphi(u) - bv - c + b - a, \\ \dot{v} &= -v + \varphi(u),\end{aligned}$$

Это означает, что если мы имеем некоторый фазовый портрет системы (2) при значениях параметров $a = a_1, b = b_1, c = c_1$, то существует и симметричный относительно точки $u = 0, v = 1/2$ фазовый портрет этой системы при значениях параметров $a = a_1, b = b_1, c = c_2 = -a_1 + b_1 - c_1$. В пространстве параметров точки (a_1, b_1, c_1) и (a_1, b_1, c_2) лежат по разные стороны от гиперплоскости $a - b + 2c = 0$ (на равном от нее расстоянии). Таким образом, нам достаточно изучить поведение системы (2) при значениях параметров, которым отвечают точки, лежащие в одном из полупространств, на которые эта плоскость разбивает пространство параметров, например, в полупространстве $a - b + 2c \geq 0$.

Отмеченное нами свойство системы (2) отчетливо видно на построенных с помощью численных методов в [2] бифуркационных диаграммах.

В работах [1, 2] проведен исчерпывающий анализ, касающийся числа, взаиморасположения и типов стационарных состояний системы (2). Система (2) может иметь от одного до трех стационаров в конечной части плоскости. При наличии трех стационаров один из них будет седлом, два других будут узлами или фокусами (устойчивыми или неустойчивыми), из которых один будет лежать слева, а другой справа от седла.

В [4] был предложен следующий способ описания фазовых портретов систем типа системы (2). Символом $s(u)$ будем обозначать устойчивое (неустойчивое) состояние равновесия типа узел или фокус, символом $S(U)$ — устойчивый (неустойчивый) предельный цикл. Подстрочный индекс 1 будет означать, что имеется в виду левый стационар или окружающий его предельный цикл, индекс 2 будет означать, что имеется в виду правый стационар или предельный цикл вокруг него. Символ без индекса будет употребляться в ситуации, когда стационар единственный, символы S, U

без индекса будут относиться также к предельным циклам, вокруг трех стационаров. При наличии нескольких символов S, U с одним и тем же индексом или без индекса они перечисляют указанные предельные циклы в порядке по вложению изнутри.

В работах [1, 2] перечислены следующие обнаруженные авторами фазовые портреты.²

$$\begin{array}{lll}
1. & s_1 s_2 & 5_1. & s_1 u_2 & 9_1. & s_1 U_1 u_2 S \\
2. & s_1 s_2 U S & 6. & u_1 s_2 U S & 10. & u_1 s_2 S \\
3. & s_1 U_1 s_2 U S & 6_1. & s_1 u_2 U S & 10_1. & s_1 u_2 S \\
3_1. & s_1 s_2 U_2 U S & 7. & s_1 U_1 s_2 S & 11. & u_1 u_2 S \\
4. & s_1 U_1 s_2 & 7_1. & s_1 s_2 U_2 S & 12. & s \\
4_1. & s_1 s_2 U_2 & 8. & s_1 U_1 s_2 U_2 S & 13. & s U S \\
5. & u_1 s_2 & 9. & u_1 s_2 U_2 S & 14. & u S
\end{array} \tag{3}$$

В результате нашего исследования мы обнаружили еще один фазовый портрет системы (2), который описывается последовательностью

$$15. \ u S U S \tag{4}$$

и отвечает ситуации, когда в системе сосуществуют одновременно два устойчивых предельных цикла, разделенные неустойчивым циклом.

Обнаружить такой фазовый портрет нам удалось на основе детального анализа ляпуновских величин сложного фокуса системы (2), который будет изложен ниже.

2. В работе [3] мы получили, используя алгоритм Пуанкаре, выражения для первых трех ляпуновских величин сложного фокуса системы

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots
\end{aligned}$$

в терминах коэффициентов a_{ij} .

Эти выражения довольно громоздки, и в общем случае редко поддаются аналитическому исследованию, однако в некоторых частных случаях они заметно упрощаются. В частности, если мы имеем систему льенаровского типа со сложным фокусом в начале координат вида

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= p(x) + yq(x) \equiv p_1x + p_2x^3 + \dots + y(q_1x + q_2x^2 + \dots),
\end{aligned} \tag{5}$$

то для нее выражения для первых трех ляпуновских величин с точностью до положительного множителя совпадают с величинами

$$\begin{aligned}
l_1 &= p_2q_1 - p_1q_2, \\
l_2 &= 5(p_2q_3 - p_3q_2) + 3(p_4q_1 - p_1q_4), \\
l_3 &= 14p_2(p_2q_4 - p_4q_2) + 21p_1(p_3q_4 - p_4q_3) + 35p_1(p_5q_2 - p_2q_5) + \\
&\quad + 15p_1(p_1q_6 - p_6q_1).
\end{aligned} \tag{6}$$

² Индекс 1 у номера фазового портрета означает, что соответствующий фазовый портрет симметричен фазовому портрету с тем же номером без индекса.

Пусть (u_0, v_0) — стационар системы (2). В таком случае имеем

$$u_0 - (a - b)\varphi(u_0) - c = 0, v_0 = \varphi(u_0).$$

Сделаем в системе (2) замену переменных

$$x = u - u_0, y = -u + a\varphi(u) - bv + c.$$

При этом стационар (u_0, v_0) переходит в начало координат.

Получим эквивалентную системе (2) систему лъенаровского типа

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= p(x) + yq(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} p(x) &= c + (a - b)/(1 + \exp(-4u_0 - 4x)) - u_0 - x, \\ q(x) &= -2 + (4a \exp(-4u_0 - 4x))/(1 + \exp(-4u_0 - 4x))^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Начало координат будет сложным фокусом системы (7), (8), если $p(0) = q(0) = 0, p'(0) < 0$, то есть при выполнении условий

$$\begin{aligned} c + (a - b)/(1 + \exp(-4u_0)) - u_0 &= 0, \\ -2 + (4a \exp(-4u_0))/(1 + \exp(-4u_0))^2 &= 0, \\ -1 + 4(a - b) \exp(4u_0)/(1 + \exp(4u_0))^2 &< 0, \end{aligned}$$

которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} c &= (b - a)/(1 + \exp(-4u_0)) + u_0, \\ a &= (1 + \exp(4u_0))^2/(2 \exp(4u_0)), \\ -1 + 4(a - b) \exp(4u_0)/(1 + \exp(4u_0))^2 &< 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При выполнении условий (9) система (7), (8) приобретает форму (5).

Вычисляя требуемые коэффициенты p_i, q_i и подставляя их в (6), получим выражения для ляпуновских величин системы (7), (8).

После упрощающих преобразований получим, что ляпуновские величины с точностью до положительного множителя совпадают с выражениями

$$\begin{aligned} l_1 &= 1 - 2 \exp(4u_0) - (6 - 8a + 8b) \exp(8u_0) - 2 \exp(12u_0) + \\ &\quad + \exp(16u_0), \\ l_2 &= 3 - 72 \exp(4u_0) + (45 + 8(a - b)) \exp(8u_0) + \\ &\quad (240 - 368(a - b)) \exp(12u_0) + (45 + 8(a - b)) \exp(16u_0) + \\ &\quad - 72 \exp(20u_0) + 3 \exp(24u_0), \\ l_3 &= 1 - 4(29 + a - b) \exp(4u_0) + (717 + 160(a - b)) \exp(8u_0) + \\ &\quad + 16(102 - 205(a - b) - 6(a - b)^2) \exp(12u_0) - \\ &\quad - 2(903 - 1904(a - b) - 384(a - b)^2) \exp(16u_0) + \\ &\quad + 8(651 + 1813(a - b) - 1608(a - b)^2) \exp(20u_0) - \\ &\quad - 2(903 - 1904(a - b) - 364(a - b)^2) \exp(24u_0) + \\ &\quad + 16(102 - 205(a - b) - 6(a - b)^2) \exp(28u_0) + \\ &\quad + (717 + 160(a - b)) \exp(32u_0) - 4(29 + a - b) \exp(36u_0) + \\ &\quad + \exp(40u_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Условия (9) выделяют в пространстве параметров двумерное бифуркационное многообразие коразмерности 1, отвечающее бифуркации Андронова — Хопфа. Условие $l_1 = 0$ из (10) выделяет в этом многообразии одномерное бифуркационное многообразие коразмерности 2, отвечающее вырожденной бифуркации Андронова — Хопфа ("ноль первой ляпуновской величины"). Это многообразие может быть описано следующим образом

$$\begin{aligned} a &= (1 + \vartheta)^2 / (2\vartheta), \\ b &= (1 + \vartheta)^2 (1 + \vartheta^2) / (8\vartheta^2), \\ c &= (1 - 3\vartheta - 3\vartheta^2 + \vartheta^3 + 2\vartheta \ln \vartheta) / (8\vartheta), \\ 0 &< \vartheta < +\infty, \vartheta \neq 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Координаты (u_0, v_0) соответствующего (единственного) стационара системы (2) при этом определяются из равенств $\vartheta = \exp(4u_0)$, $v_0 = \varphi(u_0)$.

При значениях параметров a, b, c , задаваемых (11), система (7), (8) (а значит, и (2)) имеет сложный фокус кратности 2, устойчивость которого определяется знаком второй ляпуновской величины l_2 , задаваемой (10), (11) с учетом равенства $\vartheta = \exp(4u_0)$, то есть знаком выражения

$$\bar{l}_2 = 2(1 + \vartheta)^2 (1 - 14\vartheta + 6\vartheta^2 - 14\vartheta^3 + \vartheta^4).$$

Уравнение $\bar{l}_2 = 0$ имеет два положительных корня ϑ_1, ϑ_2

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= (7 + 3\sqrt{5} + \sqrt{6}\sqrt{15 + \sqrt{5}}) / 2 \approx 13.6349, \\ \vartheta_2 &= (7 + 3\sqrt{5} - \sqrt{6}\sqrt{15 + \sqrt{5}}) / 2 \approx .0733414, \end{aligned}$$

которым отвечают значения параметров $a_1 \approx 7.8541$, $b_1 \approx 26.9164$, $c_1 \approx 18.4129$ и $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$, $c_2 \approx 0.64937$, при этом $a_1 - b_1 + 2c_1 > 0$, $a_2 - b_2 + 2c_2 < 0$.

Непосредственная проверка показывает, что третья ляпуновская величина отрицательна при значениях параметров (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) .

Система (2) при таких значениях параметров имеет единственный стационар, который будет устойчивым сложным фокусом кратности 3.

Известно [5], что в пространстве параметров к точкам, отвечающим нулю второй ляпуновской величины, примыкает область значений параметров, при которых система имеет три концентрических предельных цикла вокруг стационарного состояния.

Таким образом, мы доказали, что существуют значения параметров a, b, c , при которых система (2) имеет три предельных цикла, которые окружают единственную точку покоя, которая является неустойчивым фокусом. Два из предельных циклов устойчивы и разделены неустойчивым предельным циклом.

3. На рис.1 приведена часть полной бифуркационной диаграммы системы (2) при фиксированном значении параметра $a > a_1$. Отсутствующая часть диаграммы легко может быть восстановлена на основе соображений симметрии, изложенных выше. Эта диаграмма довольно типична и, в частности, имеет много общего с диаграммой, представленной в [1, 2] для

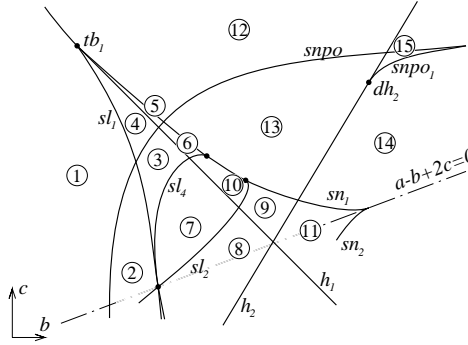


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма системы (2)

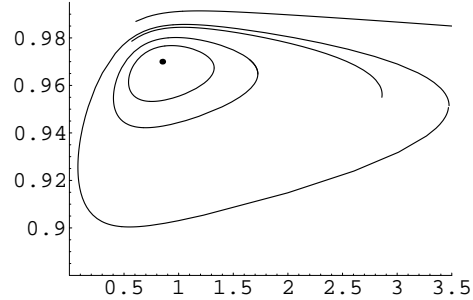


Рис. 2: Фазовый портрет системы (2) при $a=16.$, $b=130.$, $c=111.165$

значений $a < a_1$. Мы сохраняем введенные там обозначения и ограничимся лишь краткими пояснениями. Более детальное описание упоминаемых бифуркаций можно найти, например, в [5, 6]

Кривая sn_1 отвечает наличию в системе двукратного стационара, который при надлежащем шевелении параметров распадается на седло и узел, лежащий левее седла. На кривой sn_1 имеется точка tb_1 , отвечающая бифуркации Богданова — Такенса и разделяющая кривую на участки, отвечающие устойчивым или неустойчивым седло-узлам.

Луч h_1 (h_2) отвечает бифуркации Андронова — Хопфа левого (правого) стационара в области множественности или же единственного стационара. Как было отмечено выше, эти лучи задаются выражениями (9). Точка dh_2 на луче h_2 отвечает вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа и разделяет этот луч, на участки, отвечающие мягкой и жесткой потере устойчивости. Вторая ляпуновская величина в точке dh_2 положительна. (Напомним, что на диаграмме из [1, 2] для $a < a_1$ вторая ляпуновская величина в точке dh_2 отрицательна.)

Кривые sl_1 и sl_2 отвечают наличию в системе петель сепаратрис седла вокруг левого и правого стационаров, кривая sl_4 — наличию в системе петли сепаратрисы седла, охватывающей оба оставшихся стационара.

Кривая $snpo$ соответствует наличию в системе двукратного предельного цикла, устойчивого снаружи, $snpo_1$ — двукратного предельного цикла, устойчивого изнутри. Эти кривые сливаются в точке, отвечающей трехкратному циклу системы (2), образуя там характерное острие.

Перечисленные кривые разбивают пространство параметров на области, отвечающие различным грубым фазовым портретам исследуемой системы, описание которых приведено в (3), (4).

Как обычно, мы указываем на рисунке лишь взаиморасположение бифуркационных множеств без соблюдения масштаба, поскольку их изображение в реальном масштабе наталкивается на трудности технического характера.

Множества локальных бифуркаций sn_i, h_i, tb_i, dh_i могут быть заданы

явными формулами, как, например, (9), (11). Поэтому их построение не вызывает трудностей. Что касается множеств нелокальных бифуркаций $sl_i, snpo, snpo_1$, то при их построении мы пользовались общими результатами теории бифуркаций, качественной теории дифференциальных уравнений и результатами численных экспериментов.

Существенным отличием нашей бифуркационной диаграммы от диаграммы, приведенной в [1, 2] для значений $a < a_1$, является наличие на ней кривой $snpo_1$ и области 15, существование которых доказано выше.

На рис.2 изображен фазовый портрет системы (2) при значениях параметров $a = 16., b = 130., c = 111.165$, отвечающих области 15.³

Таким образом, анализ выражений для ляпуновских величин сложного фокуса системы, описывающей динамику нейронной сети из двух нервных клеток, позволил нам дополнить результаты, полученные при исследовании этой модели другими авторами. В частности, мы добавили к найденным ранее фазовым портретам исследуемой системы еще один портрет, содержащий два устойчивых предельных цикла. Изучив полную бифуркационную диаграмму, мы указали область пространства параметров системы, которым отвечает найденный фазовый портрет.

Результаты работ [1, 2], а также полученные нами результаты дают нам основание утверждать, что в списке (3), (4) указаны все возможные фазовые портреты системы (2).

4. Замечание. Как мы уже отмечали, бифуркационная диаграмма, приведенная в [1, 2], является довольно типичной и встречается при исследовании многих математических моделей, см. [7, 8] для ссылок. В частности, аналогичная диаграмма была построена нами в работе [9], посвященной исследованию плоской системы уравнений, моделирующей распространение сигнала в нервном волокне.

Мы приносим благодарность профессору F. Giannakopoulos за предоставленные в наше распоряжение материалы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. Giannakopoulos, O. Oster. *Bifurcation properties of a planar system modelling neural activity*. Planar Nonlinear Dynamical Systems (Delft, 1995), Differential and Dynamical Systems. 1997. V. 5. 229–242.

[Zbl 0898.34039](#)

- [2] R.E.Kooij, F. Giannakopoulos. *Periodic orbits in planar systems modelling neural activity*. Quarterly of Applied Mathematics. 2000. V.63. №3. P.437–457.

³ Для того чтобы подтвердить существование трех предельных циклов в системе (2) при указанных значениях параметров, мы численно исследовали соответствующее отображение Пуанкаре и показали, что оно имеет три неподвижные точки.

- [3] Волокитин Е.П., Тресков С.А. *О ляпуновских величинах сложного фокуса динамической системы на плоскости*. Известия РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 1997. Т. 1. №1. С.59–72. [Zbl 0901.34033](#)
- [4] Ваганов Д.А., Абрамов В.Г., Самойленко Н.Г. *Определение областей существования колебательных процессов в реакторах идеального смешения*. Докл.АН СССР. 1977. Т.234. №3. С.640–643.
- [5] Базыкин А.В., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И. *Портреты бифуркаций: бифуркационные диаграммы плоских динамических систем*. М., Знание. 1989. [Zbl 0714.58038](#)
- [6] Y.A.Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York. 1995. [Zbl 0829.58029](#)
- [7] A.Khibnik, B.Krauskopf, C.Rousseau. *Global study of a family of cubic Lienard equations*. Preprint. CRM-2471, April 1997.
- [8] A.Khibnik, B.Krauskopf, C. Rousseau. *Global study of a family of cubic Lienard equations*. Nonlinearity. 1998. V.11. №6, P.1505–1519. [Zbl 0920.58034](#)
- [9] Волокитин Е.П., Тресков С.А. *Параметрический портрет системы уравнений Фиц-Хью*. Математическое моделирование. 1994. №6. С.65–78. [Zbl pre01632802](#)

Институт математики им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
 e-mail: volok@math.nsc.ru
 treskov@math.nsc.ru